

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Затверджено
Вченою радою фізичного факультету
«___» _____ 2010 р.

Протокол № _____
Голова вченої ради, декан

Проф. Макарець М.В.

Фізичний факультет
Кафедра молекулярної фізики

Доктор фізико-математичних наук,
Професор Гречко Леонід Григорович,
С.н.с. Лерман Леонід Борисович

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ У ФІЗИЦІ ТА МЕДИЦИНІ

РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ

для студентів 3-го курсу фізичного факультету
групи спеціалізації „Медична фізика”
спеціальності 6.070100

Затверджено
кафедрою молекулярної фізики
«___» _____ 2010 р.

Протокол № _____
Завідувач кафедри

Проф. Булавін Л.А.

КИЇВ-2010

Вступ

Дисципліна «Нелінійні коливання у фізиці та медицині» для студентів фізичного факультету групи спеціалізації «Медична фізика» є спеціальною дисципліною з циклу дисциплін вільного вибору студента для спеціальності «Фізика» спеціалізації «Медична фізика», що читається в VI семестрі в обсязі 2 кредитів, в тому числі 34 годин аудиторних занять, з них 34 години лекцій, і 38 годин самостійної роботи. Закінчується заліком у VI семестрі.

Метою і завданням навчальної дисципліни «Нелінійні коливання у фізиці та медицині» є отримання базових знань з основ теорії нелінійних коливань та застосування цієї теорії у задачах фізики та біофізики.

Предмет навчальної дисципліни «Нелінійні коливання у фізиці та медицині» – це основи теорії нелінійних коливань та застосування цієї теорії у задачах фізики та біофізики.

Вимоги до знань та вмінь.

Студент повинен знати:

1. Загальну теорію лінійних коливань систем з багатьма ступенями вільності.
2. Теорію стійкості розв'язків нелінійних коливань.
3. Методи розв'язку нелінійних коливань (малого параметру та повільних амплітуд).
4. Прямі методи інтегрування нелінійних коливань.
5. Моделі популяцій та методи їх дослідження.
6. Біфуркації Хопфа та Андронова-Хопфа.

Студент повинен вміти:

1. Розв'язувати системи лінійних диференціальних рівнянь.
2. Досліджувати на стійкість особливі точки нелінійних диференціальних рівнянь.
3. Користуватися критеріями існування граничного циклу для побудови фазових портретів нелінійних диференціальних рівнянь.
4. Складати рівняння, що відповідають моделям основних фізичних та екологічних процесів, та розв'язувати їх.
5. Застосовувати методи малого параметру та повільних амплітуд для розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь.

Місце в структурно-логічній схемі спеціальності. Спеціальна навчальна дисципліна «Нелінійні коливання у фізиці та медицині» є складовою циклу професійної підготовки фахівців з медичної фізики освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр». Вона спирається на знання, отримані студентом, в рамках базових курсів з математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, класичної механіки. У свою чергу, вона є підґрунтям для вивчення таких дисциплін як «Фізична кінетика», «Комп'ютерне моделювання в молекулярній та медичній фізиці», «Фазові переходи в медико-біологічних об'єктах», «Біоенергетика та термодинаміка необоротних процесів», «Сучасні проблеми медичної фізики», «Основи молекулярної біофізики», «Додаткові розділи медичної фізики», а також дає знання та вміння з експериментальних методів дослідження, необхідних для проходження науково-виробничої, науково-дослідної та переддипломної практик, для виконання бакалаврських та магістерських робіт за тематикою кафедри молекулярної фізики в рамках спеціалізації медична фізика.

Система контролю знань та умови складання іспиту. Навчальна дисципліна „Нелінійні коливання” оцінюється за **модульно-рейтинговою системою**. Вона складається з **2 модулів**. Результати навчальної діяльності студентів оцінюються за **100 - бальною шкалою**.

Форми поточного контролю: оцінювання результатів виконання домашніх самостійних завдань. Максимальна кількість балів, яку студент може отримати за виконання домашніх завдань в одному модулі, дорівнює **10 балам**. Наприкінці першого змістовного

модулю проводиться контроль знань у вигляді **колоквіуму**. Максимальна кількість балів, яку студент може отримати за колоквіум, дорівнює **20 балам**.

Підсумковий модульний контроль знань студента проводиться у формі **заліку**, під час якого може бути отримана максимальна кількість балів – **60 балів**.

Підсумкова семестрова рейтингова оцінка складається з семестрової модульної та екзаменаційної оцінок і дорівнює **100 балам**.

Підсумкова оцінка з дисципліни у балах 100-бальної шкали переводиться у **двобальну** (національну шкалу):

За 100-бальною шкалою	Оцінка за національною шкалою
60 – 100	Зараховано
35 – 59	Незараховано
1 – 34	

При цьому, кількість балів відповідає оцінці:

1 – 34 – «не зараховано» з обов'язковим повторним вивченням дисципліни;

35 – 59 – «не зараховано» з можливістю повторного складання;

60 – 100 – «зараховано».

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І СЕМІНАРСЬКИХ ЗАНЯТЬ

№ лекції	Назва лекції	Кількість годин			
		лекції	семінари/ лаборант., практичні	самоств. робота	інші форми контр.
<i>Змістовий модуль 1</i>					
<i>Елементи теорії нелінійних коливань</i>					
1	Вступ. Нелінійні явища у фізиці та біофізиці.	2		2	
2	Лінійні коливання систем з кінцевою кількістю ступенів вільності. Системи з однією ступінню свободи. Гармонічний осцилятор. Резонанс.	2		2	
3	Системи з двома ступенями вільності.	2		2	
4	Коливання систем з багатьма ступенями вільності.	2		2	
5	Нелінійні процеси в динамічних системах. Нелінійні рівняння на фазовій площині.	2		2	
6	Динамічні системи з одним ступенем вільності. Параметричні динамічні системи				
7	Нелінійний осцилятор. Теорія збурень і асимптотичні методи теорії нелінійних коливань.	2		2	
8	Нелінійні системи другого порядку. Стійкість нелінійних систем.	2		2	
9	Граничні цикли та автоколивання.	2		2	
10	Хаотична динаміка. Стійкість і нестійкість лінеаризованих систем	2		2	
КОЛОКВІУМ					
Оцінка за колоквіум					

Змістовий модуль 2					
Застосування теорії нелінійних коливань у медицині та біології					
11	Характеристика моделей, які використовуються в медицині та біології. Класифікація моделей. Специфіка моделей живих систем.	2		3	
12	Періодичні процеси в біологічних системах. Неперервні і дискретні моделі зростання популяцій. Моделі розвитку окремих популяцій. Логістичне відображення.				
13	Взаємодія та боротьба видів. Класичні моделі Вольтера. Моделі відбору та проблема утворення єдиного коду. Генетичний тригер Жакоба і Моно.	2		2	
14	Моделі поширення епідемій.	2		3	
15	Ієрархія часів у біофізичних процесах.	2		2	
16	Рівняння Ходжкіна-Хакслі.	2		2	
17	Біфуркації.	2		2	
ЗАЛІК					
Оцінка за залік					
ВСЬОГО		34		38	

Загальний обсяг 72 год., в тому числі: лекції – 34 год, самостійна робота – 38 год.

ТЕМАТИЧНО – ЗМІСТОВНА ЧАСТИНА КУРСУ

Змістовний модуль 1.

Елементи теорії нелінійних коливань

Лекція 1. Вступ. Нелінійні явища у фізиці та біофізиці.

Приклади простіших моделей в біології. Класифікація моделей. Специфіка моделей живих систем. Біологічна кінетика.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення.

Література [1]

Лекція 2. Лінійні коливання систем з кінцевою кількістю ступенів вільності. Системи з одним ступенем вільності. Гармонічний осцилятор. Резонанс.

Колівні системи з одним ступенем вільності. Малі вільні коливання системи навколо стійкого стану рівноваги. Рівняння малих коливань лінійної системи в загальному випадку. Вільні та затухаючі коливання лінійного осцилятора. Осцилятор

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення.

Література [1, 2]

Лекція 3. Системи з двома ступенями вільності

Вільні коливання двох зв'язаних осциляторів. Змушені коливання двох зв'язаних осциляторів.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Вивчення матеріалу лекції.

2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення.

Література [2]

Лекція 4. Коливання систем з багатьма ступенями вільності.

Вільні коливання. Вимушені коливання. Дія сил в'язкого опору. Деякі загальні зауваження до методів дослідження систем з багатьма ступенями свободи.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Вивчення матеріалу лекції.

2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення.

Література [1, 2]

Лекція 5. Нелінійні процеси в динамічних системах. Нелінійні рівняння на фазовій площині.

Динамічні системи. Фазовий простір.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Вивчення матеріалу лекції.

2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення.

Література [1, 2]

Лекція 6. Динамічні системи з одним ступенем вільності. Параметричні динамічні системи

Динамічні системи, поведінка яких описується одним нелінійним рівнянням першого порядку. Параметричні динамічні системи.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Вивчення матеріалу лекції.

2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення.

Література [1, 2]

Лекція 7. Нелінійний осцилятор. Теорія збурень і асимптотичні методи теорії нелінійних коливань

Механічний осцилятор: частинка в потенційній ямі. Фазовий портрет та період коливань нелінійного осцилятора. Нелінійний фізичний маятник.

Теорія збурень і асимптотичні методи теорії нелінійних коливань. Теорема Пуанкаре. Осцилятор з квадратичною нелінійністю. Осцилятор з кубічною не лінійністю (рівняння Дюффінга).

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Вивчення матеріалу лекції.

2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення.

Література [1, 3]

Лекція 8. Нелінійні системи другого порядку. Стійкість нелінійних систем.

Нелінійні системи другого порядку. Характеристики фазової площини. Лінеаризація систем. Системи, які залежать від параметра. Поняття про біфуркацію.

Класифікація, характеристика та аналіз особливих точок.

Стійкість нелінійних систем за першим наближенням. Теорема Ляпунова. Вплив зовнішніх факторів на стійкість станів рівноваги. Критерій Рауса-Гурвіца.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Вивчення матеріалу лекції.

2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення.

Література [1, 3]

Лекція 9. Граничні цикли та автоколивання.

Поняття граничних циклів. Метод припасування. Критерії виникнення автоколивань у системах з одним ступенем вільності. Деякі нелінійні рівняння на фазовій площині. Біфуркація народження циклу. Теорема Хопфа.

Автоколивальна система під зовнішнім періодичним впливом. Синхронізація. Осцилятор Ван дер Поля під періодичним зовнішнім впливом. Вихідна модель і скорочене рівняння для повільної амплітуди. Наближення малих амплітуд впливу та рівняння для фази. Квазіперіодична динаміка: режим биттів.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення.

Література [1, 3]

Лекція 10. Хаотична динаміка. Стійкість і нестійкість лінеаризованих систем.

Метод функцій Ляпунова дослідження стійкості. Теорема Ляпунова про стійкість динамічних систем. Вплив збурюючих дисипативних сил на стійкість рівноваги консервативної системи. Вплив на стійкість рівноваги накладення лінійного зв'язку. Вплив на стійкість рівноваги введення в систему дисипативних сил. Функція Ляпунова.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення.

Література [1, 3]

Матеріал, що винесений на самостійне вивчення

1. Рівняння Ван-дер-Поля.
2. Метод Пуанкаре розв'язку нелінійних рівнянь.
3. Метод Крилова-Боголюбова розв'язку нелінійних рівнянь.
4. Прямі методи інтегрування нелінійних рівнянь.
5. Метод малого параметру. Теорема Пуанкаре.
6. Доведення теорем про стійкість.

Контрольні запитання та завдання

1. Чому в рівноважному стані системи, в якому узагальнена координата $q = 0$ і де $\Pi(0) = 0$ буде і $d\Pi/dq = 0$?

2. Побудувати методом Лагранжа загальний розв'язок рівняння вимушених коливань

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t),$$

де α, ω_0 - деякі константи, $f(t)$ - кусково-неперервна функція.

3. Обчислити інтеграл

$$I = \frac{h}{\omega_1 m_0} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \omega_1(t-\tau) \sin p\tau \cdot d\tau,$$

в задачі о вимушених коливаннях під дією гармонічної сили $F(t) = h \sin pt$. Ввести допоміжний кут.

4. Довести, що довільні різні власні форми системи з n ступенями волі ортогональні одна одній з деякою вагою, тобто

$$\sum_{i=1}^n m_i A_{ij} A_{ik} = 0 \quad (j \neq k, j, k = 1, 2, \dots, n).$$

5. Вивести частотне рівняння для системи руху (1.83) з двома ступенями волі

$$a_1 \ddot{x}_1 + b_1 x_1 + a \ddot{x}_2 + b x_2 = 0,$$

$$a \ddot{x}_1 + b x_1 + a_2 \ddot{x}_2 + b_2 x_2 = 0.$$

6. Показати, що парціальні частоти системи n_1, n_2 з двома ступенями вільності завжди лежать між нормальними частотами ω_1, ω_2 , тобто $(\omega'_1 \leq n_{1,2} \leq \omega'_2)$.

7. Функція Лагранжа системи двох зв'язаних осциляторів задається формулою

$$L = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} - \frac{k_1 x_1^2}{2} - \frac{k_2 (x_2 - x_1)^2}{2} - \frac{k_2 x_2^2}{2},$$

де m - маса, k_1, k_2 - коефіцієнти пружності.

8. Записати рівняння руху, знайти нормальні і парціальні частоти. Записати рівняння руху у нормальних координатах. Проаналізувати розв'язки у випадку, коли $k_1 = k_2 = k$..

Змістовний модуль 2

Застосування теорії нелінійних коливань у медицині та біології

Лекція 11. Характеристика моделей, які використовуються в медицині та біології.

Класифікація моделей. Специфіка моделей живих систем.

Характеристика моделей, які використовуються в медицині та біології. Приклади найпростіших моделей у біології. Класифікація моделей. Специфіка моделей живих систем

Завдання для самостійної роботи (3 год.)

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення.

Література [1, 3]

Лекція 12. Періодичні процеси в біологічних системах. Неперервні і дискретні моделі зростання популяцій. Моделі розвитку окремих популяцій. Логістичне відображення.

Короткоперіодичні коливання в біохімічних системах. Внутрішньоклітинні годинники. Коливання в популяціях і синхронізація в біологічних системах.

Неперервні та дискретні моделі зростання популяцій. Матричні моделі. Моделі із запізненням.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення.

Література [3]

Лекція 13. Взаємодія та боротьба видів. Класичні моделі Вольтера. Моделі відбору та проблема утворення єдиного коду. Генетичний тригер Жакоба і Моно.

Гіпотези Вольтера і класифікація типів взаємодії. Рівняння конкуренції. Рівняння системи хижак – жертва. Узагальнені моделі взаємодії двох видів.

Моделі відбору та проблема утворення єдиного коду.

Генетичний тригер Жакоба і Моно

Завдання для самостійної роботи (3 год.)

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення.

Література [1, 3]

Лекція 14. Моделі поширення епідемій.

Прості епідемії. Загальний випадок епідемії. Циклічні епідемії. Моделі венеричних захворювань. СНІД: моделювання та динаміка поширення вірусу людського імунодефіциту. Моделювання придбаного імунітету до зараження паразитами.

Завдання для самостійної роботи (3 год.)

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення.

Література [1, 3]

Лекція 15. Ієрархія часів у біофізичних процесах.

Швидкі і повільні змінні. Середні, швидкі і повільні часи. Теорема Тихонова.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення.

Література [1, 3]

Лекція 16. Рівняння Ходжкіна-Хакслі.

Біологічні мембрани. Електрозбуджуваність мембран. Модель Ходжкіна – Хакслі. Аналіз редукованої моделі Ходжкіна-Хакслі. Стохастична модель рівнянь Ходжкіна-Хакслі. Аналогія між рівнянням Ван дер Поля і системою Ходжкіна-Хакслі.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення.

Література [1, 3]

Лекція 17. Біфуркації.

Вступ. Біфуркаційні теореми Хопфа. Розрахунок μ_2 , τ_2 і β_2 для системи звичайних диференціальних рівнянь. Біфуркація Андронова-Хопфа в реакції "брюселятор".

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення.
3. Оформлення звіту з виконаної лабораторної роботи.

Література [1, 3]

Матеріал, що винесений на самостійне вивчення

1. Імунний відгук організму. Модель розвитку пухлин.
2. Теорії поширення епідемій.
3. Теорія катастроф.

Контрольні запитання та завдання

1. Наведіть наближено задачу про рух частинки маси m в потенціальній ямі виду $U(x) = U_0 + g^2(ax)$ до моделі осцилятора з кубічною нелінійністю. В рамках цієї моделі знайдіть залежність періода коливань від частоти.
2. Кулька масою m , яка несе додатній заряд q , може без тертя ковзати по непровідній спиці. Спиця проходить через центр нерухомого кільця перпендикулярно до його площини. Кільце несе від'ємний заряд $-Q$. Радіус кільця дорівнює R . Уявіть цю систему у виді моделі нелінійного осцилятора з кубічною нелінійністю. Які особливості динаміки системи така модель передає правильно, а які ні? Оцініть відносну зміну частоти коливань порівняно з лінійним випадком, якщо амплітуда коливань дорівнює $R/3$.
3. За допомогою моделі осцилятора з кубічною нелінійністю оцініть кутову амплітуду коливань математичного маятника, для якої період на 1% відрізняється від значення, передбаченого лінійною теорією.
4. За допомогою моделі осцилятора з кубічною нелінійністю оцініть відношення першої і третьої гармонік у спектрі математичного маятника, який здійснює коливання з кутовими амплітудами $\pi/6$ і $\pi/2$.
5. Знайдіть поправку до частоти лінійних коливань для математичного маятника. Покажіть, що у першому порядку по квадрату амплітуди отримана оцінка узгоджується з відомим результатом, що відповідає апроксимації математичного маятника осцилятором з кубічною нелінійністю. Оцініть період коливань з кутовою амплітудою $\pi/2$. Порівняйте знайдене значення з точним та оцінкою для осцилятора з кубічною нелінійністю.
6. Маятник у верхньому положенні рівноваги прикріплений до нелінійної пружини. Нелінійність пружини описується відношенням $F = kx + cx^3$, де k і c - додатні коефіцієнти. Кут відхилення маятника від вертикалі малий, довжина стержня l , маса кульки m . Якою з універсальних моделей нелінійного осцилятора слід користуватися при $lk > mg$ і при $lk < mg$?

Отримайте рівняння відповідних моделей у явному виді, оцініть поправку до частоти і величину зміщення центра коливань відносно положення рівноваги. Амплітуда коливань A .
7. Молекула може здійснювати коливання в полі, заданому потенціалом Леннарда-Джонса. Уявіть таку систему в виді моделі нелінійного осцилятора з квадратичною нелінійністю. Користуючись цією моделлю, оцініть збільшення відстані між молекулами, які коливаються з амплітудою a . На основі отриманої оцінки, поясніть механізм теплового розширення твердих тіл.

Питання до заліку

Контрольні питання та завдання до I-го і II-го модулів одночасно є питаннями до заліку.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976.
2. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1966.
3. Романовский А.Н., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. М.: Наука, 1984.
4. Рабинович М.И., Трубецкой Д.И. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1984.
5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.А. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
6. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983.
7. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1983.
8. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
9. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.
10. Романовский А.Н., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. М.: Наука, 1984.
11. Рубин А.Б. Биофизика. В 2-х т. М.: Наука, 1987.
12. Рубин А.Б. Термодинамика биологических процессов. М.: Изд-во МГУ, 1976.
13. Костюк П.Г., Гродзинский Д.М., Зима В.Л. и др. Биофизика. Киев: Вища школа, 1998.
14. Жаботинский А.М. Концентрационные колебания. М.: Наука, 1974.
15. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
16. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.
17. Иваницкий Г.Р., Кринский В.И., Сальков Е.Е. Математическая биофизика клетки. М.: Наука, 1978.
18. Кагава Я. Биомембраны. М.: Высшая школа, 1984.
19. Волькенштейн М.В. Биофизика. М.: Наука, 1981.
20. Васильева В.А., Роиановский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987.
21. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. М.: Прогресс, 1986.
22. Николис С., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.